Détermination des prix d'achat et de vente d'une loterie : une application de la théorie des surplus.

Jean-Michel COURTAULT et Jean-Pascal GAYANT
Université de Franche-Comté
Avenue de l'Observatoire
25030 BESANÇON

Résumé :
Dans cet article, après avoir présenté les notions de bénéfice certain et d'équivalent certain de Luenberger (qui généralisent au cas du risque les notions de surplus distribuable et de surplus équivalent de Allais), nous en dérivons les identités classiques utilisées pour l'étude de la disparité prix de vente-prix d'achat. Nous montrons en particulier comment obtenir les prix d'achat et de vente d'une loterie à partir de la fonction de bénéfice certain. Ceci nous permet d'établir un certain nombre de propriétés des prix d'achat et de vente à partir des propriétés de la fonction de bénéfice certain, en particulier sur la fourchette de liquidité d'un teneur de marché et sur le partage des risques. Nous pouvons également calculer explicitement ces prix, dans le cas d'un petit risque, dans le cadre du modèle d'espérance d'utilité avec dépendance au rang. Puis nous montrons que lorsque les risques sont partagés de façon à maximiser le bénéfice certain total les agents supportent une part du risque telle que la valeur actualisée du risque à partager est identique suivant les agents. Enfin, nous discutons la critique de Kahneman & Tversky (1979) sur la comparabilité des prix d'achat et prix de vente pour le droit de participation à une même loterie : ces prix étant déterminés à des niveaux de dotations initiales différents, il faut nécessairement compléter la spécification axiomatique des modèles de représentation des préférences pour établir les résultats précédents. Si le postulat supplémentaire ne possède aucun caractère excessif dans le cas d'un petit risque, il n'en va pas nécessairement de même lorsque la richesse initiale est soumise à un fort aléa.

1) Introduction

La disparité entre le prix d'achat et le prix de vente d'une variable aléatoire est un thème fréquemment analysé dans la littérature financière. Dans l'étude du comportement d'un teneur de marché, il s'agit d'établir l'écart existant entre le prix d'achat (position longue) et le prix de vente (position courte) d'un actif financier. Il existe de multiples justifications à l'existence d'un tel écart (ou fourchette de liquidité), y compris la sous-additivité de la mesure de vraisemblance du décideur dans le modèle d'espérance non additive d'utilité (Dow & Werlang (1992), Abouda & Chateauneuf (1997). Il existe une autre forme de disparité : celle existant entre la disponibilité maximale à payer et la disponibilité minimale à recevoir pour la participation à une variable aléatoire. Il s'agit là de concepts utiles pour l'analyse du partage des risques (Eeckhoudt & Roger (1994)) : il y aura partage des risques si et seulement si la disponibilité minimale à recevoir du vendeur de la loterie est inférieure à la disponibilité maximale à payer de l'acheteur. De manière plus générale, ce thème est essentiel pour l'analyse de l'influence de la richesse d'un décideur sur son comportement face au risque, ainsi que pour établir convenablement le lien entre les modèles théoriques de décision dans le risque et les applications en économie publique, économie de l'environnement, économie de la santé...

Les travaux de Pratt (1964) et La Vallée (1968) établissent certes les propriétés des prix d'achat et prix de vente d'une variable aléatoire dans le modèle d'espérance d'utilité, mais leurs développements sont construits à partir d'identités ad hoc auxquelles il serait souhaitable d'apporter des fondements plus solides. Les notions de bénéfice certain et d'équivalent certain dues à Luenberger (1994) peuvent constituer de tels fondements. (La fonction de bénéfice certain est une généralisation du concept de surplus distribuable de Allais (1981)). A l'intérieur d'un cadre formel global et unifié, il est alors possible de définir les prix de vente et prix d'achat d'une variable aléatoire comme solutions de processus d'optimisation conformes aux exigences de l'individualisme méthodologique. Ces processus d'optimisations sont intrinsèques, en ce sens qu'ils ne dépendent d'aucun modèle particulier de représentation des préférences dans l'incertain. Ainsi, il devient possible de caractériser les prix de vente et prix d'achat d'une variable aléatoire dans le modèle d'espérance d'utilité mais aussi dans des modèles plus généraux. Dans cet article, après avoir présenté les notions de bénéfice certain et d'équivalent certain, nous en dérivons les identités classiques utilisées pour l'étude de la disparité prix de vente-prix d'achat. Nous montrons en particulier comment obtenir les prix d'achat et de vente d'une loterie à partir de la fonction de bénéfice certain de Luenberger. Ceci nous permet d'établir un certain nombre de propriétés des prix d'achat et de vente à partir des propriétés de la fonction de bénéfice certain. Nous pouvons également calculer explicitement ces prix, dans le cas d'un petit risque, dans le cadre du modèle d'Espérance d'Utilité avec Dépendance au Rang (RDEU) (c'est à dire le modèle d'espérance non additive d'utilité dans le cas particulier du risque). Puis nous montrons que lorsque les risques sont partagés de façon à maximiser le bénéfice certain total les agents supportent une part du risque telle que la valeur actualisée du risque à partager est identique suivant les agents. Enfin, nous discutons la critique de Kahneman & Tversky (1979) sur la comparabilité des prix d'achat et prix de vente pour le droit de participation à une même loterie : ces prix étant déterminés à des niveaux de dotations initiales différents, il faut nécessairement compléter la spécification axiomatique des modèles de représentation des préférences pour établir les résultats précédents. Si le postulat supplémentaire ne possède aucun caractère excessif dans le cas d'un petit risque, il n'en va pas nécessairement de même lorsque la richesse initiale est soumise à un fort aléa.

2) Formalisation de l'incertitude

Soit S l'ensemble des états de la nature (notés s). Une variable aléatoire $\tilde{X}$ est une application de S dans un ensemble de conséquences ou résultats C (nous supposerons dans toute la suite que $C \subseteq IR$). Nous noterons $\mathcal{X}$ l'ensemble des variables aléatoires.

Soit une variable aléatoire $\tilde{X} : S \to C$ induisant une distribution de probabilités connue $p_1, p_2, ..., p_n$ sur des résultats $x_1, x_2, ..., x_n \in C \subseteq IR$, que nous supposerons toujours rangés par ordre croissant ($x_1 < x_2 < ... < x_n$). Soit $W_0 \in IR$ la richesse initiale d'un décideur dont les préférences sont représentées par un préordre total "$\succsim$" et dont la "fonction de valeur" $V : \mathcal{X} \to IR$ est telle que $\forall\ \tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{X}$:

(1) $$\tilde{X} \succsim \tilde{Y} \Leftrightarrow V(W_0+\tilde{X}) \geq V(W_0+\tilde{Y})$$

Conformément aux axiomes du modèle RDEU :

(2) $$V(W_0+\tilde{X}) = u(W_0+x_1) \,.\, \phi(1) + \sum_{i=2}^{n} \left[u(W_0 + x_i) - u(W_0 + x_{i-1})\right] . \, \phi\left(\sum_{j=i}^{n} p_j \right)$$

où u : C $\rightarrow$ IR est continue, différentiable, croissante et définie à une transformation affine croissante près ; ϕ est également croissante et définie à une transformation affine près. La fonction u est appelée fonction d'utilité ; la fonction ϕ est appelée fonction de transformation des probabilités. Sans perte de généralité, nous pouvons faire l'hypothèse que $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$.

Le modèle d'Espérance d'Utilité (EU) est le cas particulier du modèle RDEU où la fonction ϕ est linéaire et donc devient la fonction identité. En effet, dans une telle situation, la fonction de valeur devient :

$$(3) \qquad V(W_0+\tilde{X}) = u(W_0+x_1) + \sum_{i=2}^{n} [\, u(W_0+x_i) - u(W_0+x_{i-1}) \,] \cdot (\sum_{j=i}^{n} p_j \,) = \sum_{i=1}^{n} p_i \, u(W_0+x_i)$$

Définissons également $E_\phi(\tilde{X})$ (l'espérance transformée de la variable aléatoire $\tilde{X}$) et $\sigma^2_\phi(\tilde{X})$ (la variance transformée de la variable aléatoire $\tilde{X}$) par :

$$(4) \qquad E_\phi(\tilde{X}) = x_1 + \sum_{i=2}^{n} (x_i - x_{i-1})\phi\left(\sum_{j=i}^{n} p_j\right)$$

$$(5) \quad \sigma^2_\phi(\tilde{X}) = [\, x_1 - E_\phi(\tilde{X}) \,]^2 + \sum_{i=2}^{n} \{\, [x_i - E_\phi(\tilde{X})\,]^2 - [x_{i-1} - E_\phi(\tilde{X})\,]^2 \,\} \, \phi(\sum_{j=i}^{n} p_j \,)$$

Il est à noter que ces moments transformés sont indépendants de W_0 : en effet, il est possible de montrer que :

$$E_\phi(W_0 + \tilde{X}) = W_0 + E_\phi(\tilde{X})$$

$$\text{et } \sigma^2_\phi(W_0 + \tilde{X}) = \sigma^2_\phi(\tilde{X})$$

3) Prix d'achat et prix de vente d'une variable aléatoire.

Le premier type de disparité entre prix d'achat et prix de vente d'une variable aléatoire est l'écart entre la position longue et la position courte d'un teneur de marché relativement à une même variable aléatoire $\tilde{X}$ lorsque la dotation initiale W_0 est fixée. Le décideur peut acheter (position longue) ou vendre à découvert (position courte) l'actif X. On notera $p_a(\tilde{X},W_0)$ le prix maximal auquel le décideur est prêt à acheter l'actif et

$p_v(\tilde{X},W_0)$ le prix minimal auquel il est prêt à le vendre à découvert à partir des relations d'indifférence suivantes (Cf. par exemple Abouda et Chateauneuf) :

(6) $$W_0 \sim W_0 + \tilde{X} - p_a(\tilde{X},W_0)$$

(7) $$W_0 \sim W_0 + (-\tilde{X}) + p_v(\tilde{X},W_0)$$

On montre que dans le modèle d'espérance d'utilité la concavité de u est, en l'absence de coûts de transactions, une condition nécessaire et suffisante à l'apparition d'un écart entre $p_a(\tilde{X},W_0)$ et $p_v(\tilde{X},W_0)$; on a, ainsi, $p_a(\tilde{X},W_0) < E(\tilde{X}) < p_v(\tilde{X},W_0)$. Dans le modèle RDEU la concavité de u n'est même plus une condition nécessaire à l'existence d'un tel écart. A la suite de Dow & Werlang (1992), Abouda & Chateauneuf (1997) déterminent une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'un tel écart dans le cas où la fonction u est linéaire : la condition $\phi(p) + \phi(1-p) \leq 1$, $\forall\ p \in [0;1]$ est équivalente à $p_a(\tilde{X},W_0) < p_v(\tilde{X},W_0)$. On peut illustrer ce résultat à l'aide d'un exemple simple et en supposant que $u(x) = x$. Soit un actif $\tilde{X}$ pouvant prendre deux valeurs : une valeur basse x_1 apparaissant avec probabilité (1-p) et une valeur haute x_2 apparaissant avec probabilité p ($x_2 > x_1$). Conformément aux relations d'indifférences ci-dessus énoncées, il est possible d'écrire :

(8) $$V(W_0) = V[W_0 + \tilde{X} - p_a(\tilde{X},W_0)]$$

(9) $$V(W_0) = V[W_0 + (-\tilde{X}) + p_v(\tilde{X},W_0)]$$

Dans le cadre du modèle RDEU avec u linéaire (encore appelé "Théorie Duale" par Yaari (1987)), ces identités deviennent :

$$W_0 = W_0 + x_1 + \phi(p)\ (x_2 - x_1) - p_a(\tilde{X},W_0)$$

$$W_0 = W_0 + \{ - x_2 + \phi(1-p)\ [- x_1 - (-x_2)] \} + p_v(\tilde{X},W_0)$$

Soit encore :

(10) $$p_a(\tilde{X},W_0) = x_1\ [1-\phi(p)] + x_2\ [\phi(p)]$$

(11) $$p_v(\tilde{X},W_0) = x_1\ [\phi(1-p)] + x_2\ [1-\phi(1-p)]$$

Si la fonction ϕ est égale à la fonction identité, les prix sont égaux ; sinon, puisque $x_2 > x_1$, il vient immédiatement : $p_a(\tilde{X},W_0) \leq p_v(\tilde{X},W_0) \Leftrightarrow \phi(p) + \phi(1-p) \leq 1$.

Le second type de disparité entre prix d'achat et prix de vente d'une variable aléatoire est l'écart entre le prix d'achat du droit de participation à une variable dont le décideur n'est pas initialement doté et le prix de vente de ce droit dont le décideur serait initialement doté[1]. Pratt (1964) définit ces deux prix et qualifie le prix de vente d'équivalent certain. Il approxime ensuite la prime de risque, définie comme l'écart entre l'espérance mathématique de la variable et son équivalent certain, dans le cas d'un petit risque. Si Pratt avait explicitement procédé, pour le prix d'achat comme pour le prix de vente, à une approximation de la prime de risque, il ne fait aucun doute que le thème de la disparité entre le prix d'achat et le prix de vente d'une variable aléatoire aurait intrigué les économistes et engendré une littérature abondante (à l'image de ce qui existe en matière de décision non risquée où la disparité prix d'achat-prix de vente d'un bien privé ou public a fait l'objet de nombreuses études, tant théoriques (Thaler (1980), Haneman (1991), Tversky & Kahneman (1991)), qu'empiriques (Coursey, Hovis & Schulze (1987), Kahneman, Knetsch & Thaler (1990) (1992)...).

A la suite de Pratt, ce sont essentiellement La Vallée (1968) puis Eeckhoudt & Gollier (1992), Eeckhoudt & Roger (1994) et Abouda et Chateauneuf (1997) qui ont établi les propriétés des prix de vente et prix d'achat d'une variable aléatoire dans le modèle d'espérance d'utilité. Leur résultat principal est que la hiérarchie entre le prix de vente et le prix d'achat d'une variable aléatoire est déterminé par le sens de variation de la fonction $-\frac{u''(.)}{u'(.)}$, fonction habituellement interprétée comme une mesure de l'aversion absolue pour le risque. Un tel résultat ne peut être obtenu qu'au prix du postulat implicite selon lequel la valeur d'une variable aléatoire par la fonction représentative des préférences d'un agent est indépendante de la dotation en actifs certains de l'agent. Cette hypothèse est contestée par Kahneman & Tversky (1979) ; cette remise en cause constitue d'ailleurs l'un des points de départ de leur élaboration d'une théorie alternative. Dans la dernière partie de cet article, nous tenterons de clarifier cette hypothèse et nous discuterons de la validité des résultats obtenus à la suite de Pratt.

Les prix d'achat et prix de vente de la variable aléatoire $\tilde{X}$ (respectivement $p_a(\tilde{X},W_0)$ et $p_v(\tilde{X},W_0+\tilde{X})$)[2], tels que Pratt et La Vallée les définissent, sont obtenus à partir des identités suivantes :

(12) $$V [W_0 - p_a(\tilde{X},W_0) + \tilde{X}] = V (W_0)$$

(13) $$\text{et } V (W_0+ \tilde{X}) = V [W_0 + p_v(\tilde{X},W_0+\tilde{X})]$$

[1] Ce prix de vente d'une variable aléatoire que l'on possède est donc différent de celui défini précédemment, relatif à une variable aléatoire que l'on ne possédait pas.

[2] Par convention d'écriture, le premier argument des fonctions $p_a(.,.)$ et $p_v(.,.)$ est la variable sur laquelle porte la transaction, le second argument est la dotation initiale.

Ces définitions concernent un agent unique (contrairement à ce qu'examinent Eeckhoudt et Roger (1994) qui s'intéressent au partage des risques entre deux agents). Dans le modèle d'espérance d'utilité, La Vallée (1968) puis Eeckhoudt & Gollier (1992) établissent que lorsque la fonction $-\frac{u''(.)}{u'(.)}$ est décroissante, la hiérarchie est $p_v(\tilde{X},W_0+\tilde{X}) > p_a(\tilde{X},W_0) > 0$ ou $p_v(\tilde{X},W_0+\tilde{X}) < p_a(\tilde{X},W_0) < 0$, lorsque la fonction $-\frac{u''(.)}{u'(.)}$ est croissante, la hiérarchie est $p_a(\tilde{X},W_0) > p_v(\tilde{X},W_0+\tilde{X}) > 0$ ou $p_a(\tilde{X},W_0) < p_v(\tilde{X},W_0+\tilde{X}) < 0$, lorsque la fonction $-\frac{u''(.)}{u'(.)}$ est constante, $p_v(\tilde{X},W_0+\tilde{X}) = p_a(\tilde{X},W_0)$.

Notre objectif est de trouver des fondements théoriques à ces spécifications (12) et (13). Mais auparavant, nous allons apporter des précisions sémantiques pour éviter toute forme de confusion. En effet, si la notion de prix d'achat de la variable aléatoire est bien la même dans les deux types de développements précédents, les notions de prix de vente diffèrent ($p_v(\tilde{X},W_0+\tilde{X})$ est le « prix de vente » de la variable aléatoire $\tilde{X}$ et $p_v(\tilde{X},W_0)$ est le « prix de vente à découvert» de la variable aléatoire $\tilde{X}$). De plus, selon que la variable aléatoire $\tilde{X}$ est "désirable" ou "indésirable", $p_a(\tilde{X},W_0)$ et $p_v(\tilde{X},W_0+\tilde{X})$ sont positifs ou négatifs et ces prix sont alternativement des disponibilités maximales à payer et des disponibilités minimales à recevoir (la disponibilité à acquitter un montant positif est équivalente à la disponibilité à recevoir un montant négatif et vice versa). Etablir la distinction entre les variables aléatoires "désirables" et les variables aléatoires "indésirables" est un exercice objectif lorsque les variables aléatoires sont constituées de résultats de même signe (les variables aléatoires désirables sont celles à résultats positifs, les variables aléatoires indésirables celles à résultats négatifs) mais subjectif lorsque les résultats sont de signes différents. Le critère permettant d'établir cette distinction est précisément le type d'attitude du décideur : est-il disposé à payer un certain montant pour participer à $\tilde{X}$ (désirable) ou faut-il le rémunérer pour qu'il participe à $\tilde{X}$ (indésirable) ? Il est donc nécessaire de choisir une norme sémantique précise. Nous proposons la typologie suivante des prix de vente et prix d'achat d'une variable aléatoire :

	Disponibilité maximale à payer	Disponibilité minimale à recevoir
Variable aléatoire $\tilde{X}$ "désirable"	Prix d'achat $p_a(\tilde{X},W_0) \geq 0$ pour l'acquisition du droit de participation à une variable $\tilde{X}$ dont on n'est pas initialement doté	Prix de vente $p_v(\tilde{X},W_0+\tilde{X})$ ≥ 0 pour la cession du droit de participation à une variable $\tilde{X}$ dont on est initialement doté
Variable aléatoire $\tilde{X}$ "défavorable"	Prix de vente $p_v(\tilde{X},W_0+\tilde{X})$ ≤ 0 pour la cession du droit de participation à une variable $\tilde{X}$ dont on est initialement doté (Prix que l'agent est prêt à payer pour ne pas avoir à participer à $\tilde{X}$)	Prix d'achat $p_a(\tilde{X},W_0) \leq 0$ pour l'acquisition du droit de participation à une variable $\tilde{X}$ dont on n'est pas initialement doté (Rémunération qu'il faut verser à l 'agent pour qu'il accepte de participer à $\tilde{X}$)

4) Bénéfice certain et équivalent certain

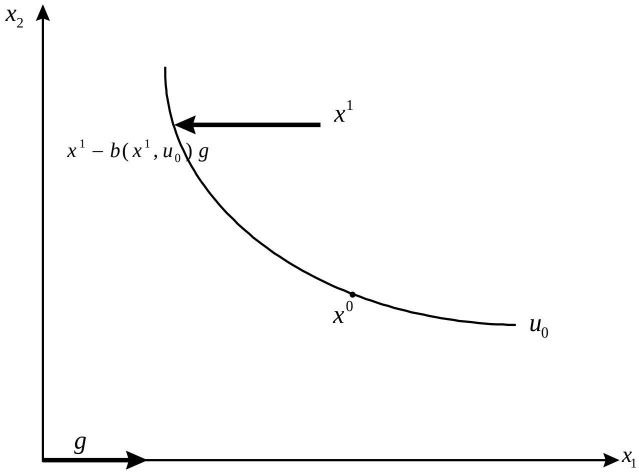
Il est possible de donner des fondements théoriques aux spécifications permettant de définir les prix d'achat et prix de vente en les dérivant des notions de bénéfice certain et d'équivalent certain dues à Luenberger (1995). La fonction de bénéfice certain est une généralisation du concept de surplus distribuable de Dupuit-Allais tout comme la fonction d'équivalent certain est une généralisation du concept de surplus équivalent de Pareto-Allais.(cf. Allais (1981), 4ème partie). L'évaluation des avantages retirés de la consommation d'un panier de biens se fait de deux manières différentes selon que la situation initiale de l'agent est appréciée en termes d'utilité ou en termes de biens. Définissons tout d'abord la "fonction de bénéfice" qui convertit les préférences du décideur sur un ensemble de consommation IR_+^L en une représentation numérique. Etant donné un niveau d'utilité initial u_0 et un panier de référence $\mathbf{g} \in IR_+^L$, le bénéfice $b(\mathbf{x}^1,u_0)$ lié au passage du niveau d'utilité u_0 à un point $\mathbf{x}^1 \in IR_+^L$, est égal au nombre d'unités de g que le décideur est prêt à abandonner pour passer de u_0 à $\mathbf{x}^1$:

$$b(\mathbf{x}^1, u_0) = \underset{\beta}{\mathrm{Max}}\, \beta$$

$$\text{s.c. } u(\mathbf{x}^1 - \beta\mathbf{g}) \geq u_0$$

$$(\mathbf{x}^1 - \beta\mathbf{g}) \in IR_+^L$$

On peut représenter de la façon suivante le bénéfice dans le cas de deux biens (L=2) où l'on a supposé que $\mathbf{g}$ = (1, 0) :



En reprenant la terminologie de Allais, si la situation initiale est en $\mathbf{x}^0$ (tel que $u(\mathbf{x}^0) = u_0$) alors en passant de la situation $\mathbf{x}^0$ la situation $\mathbf{x}^1$, l'agent reçoit un surplus équivalent à $b(\mathbf{x}^1, u_0)$ unités du bien 1. En passant de la situation $\mathbf{x}^0$ à la situation isohédone $\mathbf{x}^1 - b(\mathbf{x}^1, u_0)\mathbf{g}$ on libère un surplus équivalent à $b(\mathbf{x}^1, u_0)$ unités du bien 1. La fonction de Bénéfice de Luenberger peut donc être considérée comme la fonction dont la valeur est égale au surplus distribuable de Allais.

Luenberger (1995) montre que la fonction de bénéfice possède les propriétés suivantes[3] :

(i) $b(\mathbf{x}, u)$ est une fonction décroissante de u

(ii) Si $(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{g})$ et $\mathbf{x} \in IR_+^{LS}$ alors $b(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{g}, u) = \alpha + b(\mathbf{x}, u)$

(iii) Si u($\mathbf{x}$) est quasi-concave par rapport à $\mathbf{x}$ alors $b(\mathbf{x}, u)$ est concave par rapport à $\mathbf{x}$.

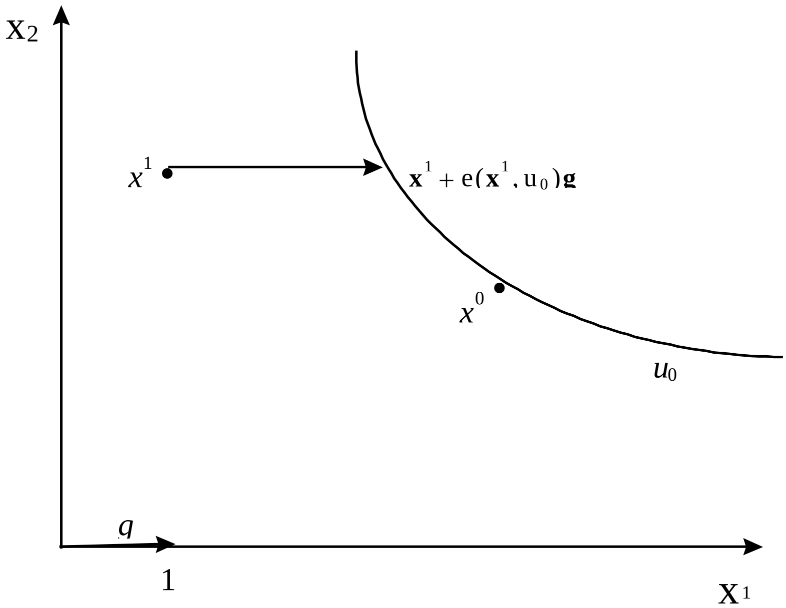
(iv) Si la fonction de bénéfice est différentiable en ($\mathbf{x}$, u) et si u($\mathbf{x}$) est quasi-concave alors $p_j(\mathbf{x}, u) = \dfrac{\partial b(\mathbf{x}, u)}{\partial x_j}$

[3] Cf. propositions 4.3 et 4.5 p. 100 et 147.

La dernière propriété qui peut-être considérée comme le dual du lemme de Shephard signifie que le bénéfice marginal est égal à un prix. Dans le cas de l'incertitude ce prix sera un prix d'état.

En nous inspirant de la définition de l'équivalent certain donnée par Luenberger, définissons maintenant la fonction de surplus équivalent[4]. Etant donné un panier de biens initial $\mathbf{x}^0 \in IR^L_+$, et un panier de référence $\mathbf{g}$, le surplus équivalent est le nombre de paniers de biens qu'il faudrait donner à l'agent pour qu'il renonce à la situation lui apportant un niveau d'utilité u_0 :

$$\begin{aligned} e(\mathbf{x}^1, u_0) &= \underset{\gamma}{Min}\,\gamma \\ s.c.\, u(\mathbf{x}^1 + \gamma\mathbf{g}) &\geq u_0 \\ (\mathbf{x}^1 + \gamma\mathbf{g}) &\in IR^L_+ \end{aligned}$$



Les fonctions de bénéfice et de surplus équivalent sont reliés par la relation :

(14) $$e(\mathbf{x}, u) = -b(\mathbf{x}, u)$$

C'est à dire que le nombre de paniers de biens que l'on doit donner à un individu pour qu'il renonce à u est égal à l'opposé du nombre de panier de bien qu'il est prêt à donner pour obtenir ce même niveau d'utilité u.

---

[4] Les notions de surplus distribuable et de surplus équivalent (dénommées ainsi par Allais) sont dues à Dupuit et Pareto, respectivement. Cf. M. Allais (1981), Quatrième partie p. 157-235.

Par conséquent, les propriétés de la fonction de surplus équivalent se déduisent immédiatement de celles de la fonction de bénéfice :

(i) $e(\mathbf{x},u)$ est une fonction croissante de u

(ii) Si $(\mathbf{x}+\alpha\mathbf{g})$ et $\mathbf{x} \in IR_{+}^{L}$ alors $e(\mathbf{x}+\alpha\mathbf{g},u) = -\alpha + e(\mathbf{x},u)$

(iii) Si u(**x**) est quasi-concave par rapport à **x** alors $e(\mathbf{x},u)$ est convexe par rapport à **x**.

(iv) Si la fonction de bénéfice est différentiable en (**x**, u) et si u(**x**) est quasi-concave alors $p_j(\mathbf{x},u) = -\frac{\partial e(\mathbf{x},u)}{\partial x_j}$

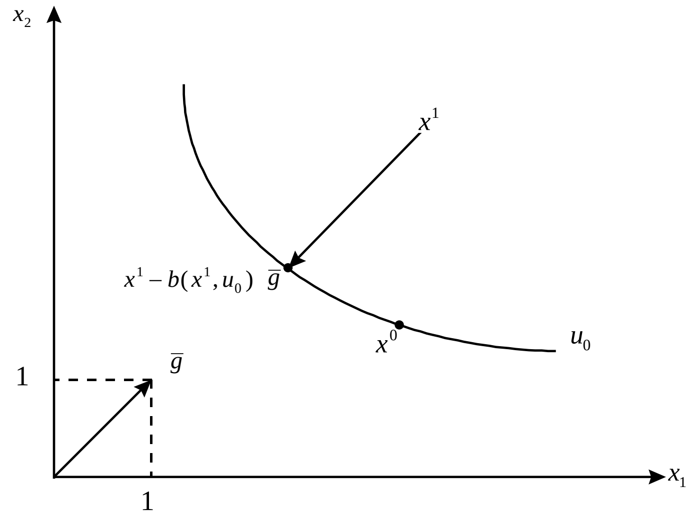
On peut adapter avec Luenberger les définitions des fonctions de bénéfice et de surplus équivalent à un contexte d'incertitude. En effet, il est possible de quantifier l'utilité ou le surplus (distribuable ou équivalent) d'un agent en situation d'incertitude en comparant les paniers de biens à un panier de bien obtenu avec certitude. Cette généralisation des fonctions de bénéfice et de surplus équivalent nous amène à définir respectivement les fonctions de bénéfice certain et d'équivalent certain.

S'il y a S états de la nature, on peut définir le "bénéfice certain" associé à un panier de biens contingents $\mathbf{x}^1 = (\mathbf{x}_1^1,\ldots.,\mathbf{x}_S^1) \in IR_{+}^{LS}$ de la manière suivante : étant donné un niveau d'utilité initial u_0 et un panier de biens alternatif $\mathbf{x}^1 = (\mathbf{x}_1^1,\ldots.,\mathbf{x}_S^1)$, **le bénéfice certain** de cette variation est égal par définition à :

$$
\begin{aligned}
b(\mathbf{x}^1,u_0) = \underset{\beta}{\mathrm{Max}}\,\beta \\
\text{s.c. } u(\mathbf{x}^1 - \beta\,\overline{\mathbf{g}}) \geq u_0 \\
(\mathbf{x}^1 - \beta\,\overline{\mathbf{g}}) \in IR_{+}^{LS}
\end{aligned}
$$

où IR_{+}^{LS} est l'ensemble de consommation et où le panier de référence $\overline{\mathbf{g}} = (\mathbf{g},\ldots.,\mathbf{g})$ donne avec certitude au consommateur le panier $\mathbf{g} \in IR_{+}^{L}$.

$b(\mathbf{x}^1,u_0)$ est donc le nombre de paniers **g** que l'agent serait prêt à donner (avec certitude) de façon à obtenir le panier $\mathbf{x}^1$.



Etant donné un panier de biens initial $\mathbf{x}^0 = \left(\mathbf{x}_1^0, \ldots., \mathbf{x}_S^0\right)$ et un niveau d'utilité alternatif u_1 **l'équivalent certain** de cette variation est égal par définition à :

$$
\begin{aligned}
e\left(\mathbf{x}^0, u_1\right) = & \underset{\gamma}{\operatorname{Min}}\, \gamma \\
& \text{s.c. } u\left(\mathbf{x}^0 + \gamma\, \overline{\mathbf{g}}\right) \geq u_1 \\
& \quad \left(\mathbf{x}^0 + \gamma\, \overline{\mathbf{g}}\right) \in \mathrm{IR}_+^{LS}
\end{aligned}
$$

$e\left(\mathbf{x}^0, u_1\right)$ est le nombre de panier de biens **g** donné avec certitude au consommateur qui est équivalent à la variation. Le consommateur ne renoncera à u_1 que si on lui donne $e\left(\mathbf{x}^0, u_1\right)$ panier de biens **g.**

Ces définitions vont nous permettre de généraliser les notions de prix d'achat et de vente. Supposons dans un premier temps que le nombre de biens physiques est $L = 1$ et que le panier de référence est $\overline{\mathbf{g}} = (1, \ldots., 1)$. Supposons que le bien physique est le bien numéraire. Supposons également un individu dont la richesse initiale W_0 peut-être aléatoire ou certaine et une loterie $\tilde{X}$ dont cet individu peut également être en possession ou non. Par définition, le prix d'achat d'une loterie est le prix maximal qu'un individu est prêt à payer pour obtenir cette loterie sous réserve qu'il puisse effectivement payer ce prix dans tous les états de la nature (i.e. la probabilité de la faillite est nulle) :

$$
(15) \qquad \begin{cases}
p_a\left(\tilde{X}, W_0\right) = \underset{\beta}{\operatorname{Max}}\, \beta \\
\qquad \text{s.c. } V\left(W_0 + \tilde{X} - \beta \overline{\mathbf{g}}\right) \geq V\left(W_0\right) \\
\qquad \quad W_0 + \tilde{X} - \beta \overline{\mathbf{g}} \in \mathrm{IR}_+^S
\end{cases}
$$

Par définition, le prix de vente d'une loterie dont l'individu est doté est le prix minimal que cet individu est disposé à recevoir pour céder sa loterie (sous les mêmes réserves de responsabilité limitée) :

$$(16) \qquad \begin{cases} p_v\left(\tilde{X}, W_0 + \tilde{X}\right) = \underset{\gamma}{\mathrm{Min}}\,\gamma \\ \qquad V\left(W_0 + \gamma\bar{\mathbf{g}}\right) \geq V\left(W_0 + \tilde{X}\right) \\ \qquad W_0 + \gamma\bar{\mathbf{g}} \in IR_+^S \end{cases}$$

Enfin le prix de vente à découvert d'une loterie est le prix minimal que cet individu est disposé à recevoir pour vendre à découvert cette loterie (sous les mêmes réserves de responsabilité limitée) :

$$(17) \qquad \begin{cases} p_v\left(\tilde{X}, W_0\right) = \underset{\gamma}{\mathrm{Min}}\,\gamma \\ \qquad V\left(W_0 - \tilde{X} + \gamma\bar{\mathbf{g}}\right) \geq V\left(W_0\right) \\ \qquad W_0 - \tilde{X} + \gamma\bar{\mathbf{g}} \in IR_+^S \end{cases}$$

En comparant les définitions des fonctions de bénéfice et d'équivalent certain avec celles des prix d'achat et de vente on obtient les égalités suivantes :

$$(18) \qquad p_a\left(\tilde{X}, W_0\right) = b\left(W_0 + \tilde{X}, V\left(W_0\right)\right)$$

$$(19) \qquad p_v\left(\tilde{X}, W_0 + \tilde{X}\right) = e\left(W_0, V\left(W_0 + \tilde{X}\right)\right)$$

$$(20) \qquad p_v\left(\tilde{X}, W_0\right) = e\left(W_0 - \tilde{X}, V\left(W_0\right)\right)$$

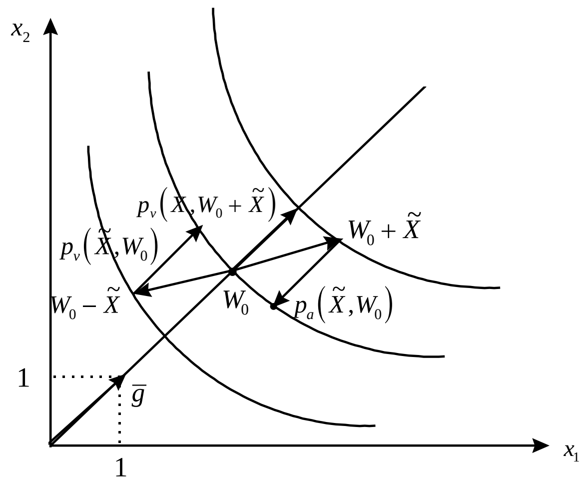
Compte tenu de la relation unissant la fonction de bénéfice certain à la fonction d'équivalent certain [cf. équation (14)] on peut exprimer les prix d'achat et de vente d'une loterie en fonction uniquement de la fonction de bénéfice certain :

$$(18') \qquad p_a\left(\tilde{X}, W_0\right) = b\left(W_0 + \tilde{X}, V\left(W_0\right)\right)$$

$$(19') \qquad p_v\left(\tilde{X}, W_0 + \tilde{X}\right) = -b\left(W_0, V\left(W_0 + \tilde{X}\right)\right)$$

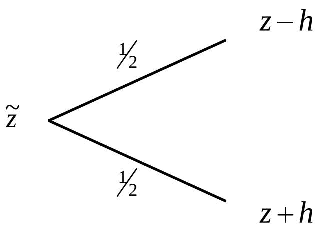
$$(20') \qquad p_v\left(\tilde{X}, W_0\right) = -b\left(W_0 - \tilde{X}, V\left(W_0\right)\right)$$

On peut représenter les prix d'achat et de vente d'une loterie par le graphique suivant :



5) Comparaison des prix d'achat et de vente dans le cas d'un petit risque

Considérons maintenant un agent se comportant conformément aux axiomes du modèle RDEU. Nous allons évaluer les prix d'achat et de vente de la loterie suivante :



Nous supposerons également que la richesse initiale W_0 (hors loterie) de l'agent est certaine et égale à x dans tous les états de la nature (on peut noter, W_0 =(x , x)). Considérons d'abord le cas où l'agent ne possède pas la loterie. Il peut donc soit l'acheter soit la vendre à découvert. Le prix d'achat $p_a(x, h)$ de cette loterie est donné par la relation :

(21) $$R\,DEU\left(x + \tilde{z} - p_a(x,h)\right) = u(x)$$

où

(22) $$\begin{aligned} R\,DEU\left(x + \tilde{z} - p_a(x,h)\right) = u\left(x + z - h - p_a(x,h)\right) + \phi(1/2) \times \Big[& u\left(x + z + h - p_a(x,h)\right) \\ & - u\left(x + z + h - p_a(x,h)\right)\Big] \end{aligned}$$

Les deux membres de l'équation peuvent être considérés comme des fonctions de h dont nous allons un faire un développement limité.

Soit $f(h) = u\left(x+z-h-p_a\left(x,h\right)\right)$. Les dérivés premières et secondes de la fonction $f(.)$ sont données par :

$$f'(h) = u'\left(x+z-h-p_a\left(x,h\right)\right)\left(-1-p_a'\left(x,h\right)\right)$$

$$f''(h)=u''\left(x+z-h-p_a\left(x,h\right)\right)\left(1-p_a'\left(x,h\right)\right)^2 - p_a''\left(x,h\right)u'\left(x+z-h-p_a\left(x,h\right)\right)$$

De même, définissons : $g(h)=u\left(x+z+h-p_a\left(x,h\right)\right)$. Les dérivés premières et secondes de la fonction $g(.)$ sont données par :

$$g'(h)=u'\left(x+z+h-p_a\left(x,h\right)\right)\left(1-p_a'\left(x,h\right)\right)$$

$$g''(h)=u''\left(x+z+h-p_a\left(x,h\right)\right)\left(1-p_a'\left(x,h\right)\right)^2 - p_a''\left(x,h\right)u'\left(x+z-h-p_a\left(x,h\right)\right)$$

On peut alors écrire le développement limité à l'ordre 2 de la fonction définie par l'équation (22) :

$$\begin{aligned}
R\,DEU\left(x+\tilde{z}-p_a\left(x,h\right)\right)&=u\left(x+z-p_a\left(x,0\right)\right)+h\Big[u'\left(x+z-p_a\left(x,0\right)\right)\times\left(-1-p_a'\left(x,0\right)\right)\\
&+\phi\left(1/2\right)\left(u'\left(x+z-p_a\left(x,0\right)\right)\times 2\right)\Big]+\frac{h^2}{2}\Big[u''\left(x+z-p_a\left(x,0\right)\right)\left(1-p_a'\left(x,0\right)\right)^2-\left(1-p_a'\left(x,0\right)\right)^2\\
&\phi\left(1/2\right)+u''\left(x+z-p_a\left(x,0\right)\right)\left(1-p_a'\left(x,0\right)\right)^2-p_a''\left(x,0\right)u'\left(x+z-p_a\left(x,0\right)\right)\Big]+\ldots
\end{aligned}$$

On sait qu'une fonction admet un développement limité unique et par conséquent par identification on doit avoir (pour que (21) soit identiquement vrai) :

$$u\left(x+z-p_a\left(x,0\right)\right)=u(x)$$

$$\boxed{p_a\left(x,0\right)=z} \tag{23}$$

$$u'\left(x+z-p_a\left(x,0\right)\right)\left(2\,\phi\left(1/2\right)-\left(1-p_a'\left(x,0\right)\right)\right)=0$$

$$\boxed{p_a'\left(x,0\right)=2\,\phi\left(1/2\right)-1} \tag{24}$$

$$u''\left(x+z-p_a\left(x,0\right)\right)\left[\left(2\left(-2\,p_a'\left(x,0\right)\right)\phi\left(1/2\right)\right)+\left(1+p_a'\left(x,0\right)\right)^2\right]-p_a''\left(x,0\right)u'\left(x+z-p_a\left(x,0\right)\right)=0$$

$$\boxed{p_a''\left(x,0\right)=\frac{u''(x)}{u'(x)}4\,\phi\left(1/2\right)\left(1-\phi\left(1/2\right)\right)} \tag{25}$$

On peut donc écrire le développement limité du prix d'achat comme :

$$p_a\left(x,0\right)=z+h\left(2\,\phi\left(1/2\right)-1\right)+\frac{h^2}{2}\frac{u''(x)}{u'(x)}4\,\phi\left(1/2\right)\left(1-\phi\left(1/2\right)\right)+\ldots. \tag{26}$$

Soit encore

(27) $$\boxed{p_a(x,h) = E_\phi(\tilde{z}) + \frac{\sigma_\phi^2(\varepsilon)}{2}\frac{u''(x)}{u'(x)} + \ldots}$$

où :

$$E_\phi(\tilde{z}) = (z-h) + \phi(1/2)\big((z+h)-(z-h)\big)$$
$$= (z-h) + \phi(1/2)2h$$

$$\sigma_\phi^2(\tilde{z}) = \big((z-h) - E_\phi(\tilde{z})\big)^2 + \phi(1/2)\Big[\big(z+h-E_\phi(\tilde{z})\big)^2 - \big(z-h-E_\phi(\tilde{z})\big)^2\Big]$$
$$= 4h^2\,\phi(1/2)\big(1-\phi(1/2)\big)$$

Déterminons maintenant le prix de vente à découvert $p_v(x,h)$. On a :

(28) $$\text{RDEU}\big(x - \tilde{z} + p_v(x,h)\big) = u(x)$$

où

(29) $$\text{RDEU}\big(x - \tilde{z} + p_v(x,h)\big) = u\big(x - (z+h) + p_v(x,h)\big)\,\phi(1) +$$
$$\phi(1/2)\Big[u\big(x-(z-h)+p_v(x,h)\big) - u\big(x-(z+h)+p_v(x,h)\big)\Big]$$

On peut définir comme précédemment :

$$u\big(x-(z+h)+p_v(x,h)\big) = f(h)$$

$$f(0) = u\big(x-z+p_v(x,0)\big)$$

$$f'(0) = u'\big(x-z+p_v(x,0)\big)\big(p'_v(x,0)-1\big)$$

$$f''(0) = u''\big(x-z+p_v(x,0)\big)\big(p''_v(x,0)-1\big)^2 + u'\big(x-z+p_v(x,0)\big)\,p''_v(x,0)$$

et $u\big(x-(z+h)+p_v(x,h)\big) = g(h)$

$$g(0) = u\big(x-z+p_v(x,0)\big)$$

$$g'(0) = u'\big(x-z+p_v(x,0)\big)\big(1+p'_v(x,0)\big)$$

$$g''(0) = u''\big(x-z+p_v(x,0)\big)\big(1+p''_v(x,0)\big)^2 + u'\big(x-z+p_v(x,0)\big)\,p''_v(x,0)$$

Ainsi, doit-on avoir pour n'importe quel *h* :

$$u(x)=\Big\{u\big(x-z+p_v(x,0)\big)+hu'\big(x-z+p_v(x,0)\big)\big(p_v'(x,0)-1\big)$$

$$+\frac{h^2}{2}\Big[u''\big(x-z+p_v(x,0)\big)\big(p_v'(x,0)-1\big)^2+u'\big(x-z+p_v(x,0)\big)p_v''(x,0)\Big]+....\Big\}$$

$$+\phi(1/2)\Big\{u\big(x-z+p_v(x,0)\big)+hu'\big(x-z+p_v(x,0)\big)\big(1+p_v'(x,0)\big)$$

$$+\frac{h^2}{2}\Big[u''\big(x-z+p_v(x,0)\big)\big(p_v'(x,0)+1\big)^2+u'\big(x-z+p_v(x,0)\big)p_v''(x,0)\Big]+....\Big\}$$

$$-\Big\{u\big(x-z+p_v(x,0)\big)+hu'\big(x-z+p_v(x,0)\big)\big(p_v'(x,0)-1\big)$$

$$+\frac{h^2}{2}\Big[u''\big(x-z+p_v(x,0)\big)\big(p_v'(x,0)-1\big)^2+u'\big(x-z+p_v(x,0)\big)p_v''(x,0)\Big]+....\Big\}$$

Par identification,

$$u(x)=u\big(x-z+p_v(x,0)\big)$$

(30) $$\boxed{p_v(x,0)=z}$$

$$0=u(.)\big(p_v'(x,0)-1\big)+\phi(1/2)\underbrace{\big\{u'(x)\big(p_v'(x,0)-1\big)-u'(x)\big(p_v'(x,0)-1\big)\big\}}_{2u'(x)}$$

(31) $$\boxed{p_v'(x,0)=1-\phi(1/2)}$$

$$0=\Big(u''(x)\Big(4\big(\phi(1/2)\big)^2\Big)+u'(x)\,p_v''(x,0)\Big)+\phi(1/2)\Big[\Big(u''(x)\big(2-\phi(1/2)\big)\Big)^2+\big(p_v''(x,0)\,u'(x)\big)$$

$$-\Big(u''(x)\Big(4\big(\phi(1/2)\big)^2\Big)+u'(x)\,p_v''(x,0)\Big)\Big]$$

(32) $$\boxed{p_v''(x,0)=\frac{-u''(x)}{u'(x)}4\,\phi(1/2)\big(1-\phi(1/2)\big)}$$

Le développement limité du prix de vente à découvert est donc :

(33) $$\begin{aligned}p_v(x,h)&=p_v(x,0)+hp_v'(x,0)+\frac{h^2}{2}p_v''(x,0)+...\\&=z+h\big(1-\phi(1/2)\big)+\frac{h^2}{2}\left(\frac{-u''(x)}{u'(x)}4\,\phi(1/2)\big(1-\phi(1/2)\big)\right)+...\end{aligned}$$

C'est à dire

(34) $$\boxed{p_v(x,h)=E_\phi(\tilde{z})-\frac{\sigma_\phi^2(\tilde{z})}{2}\frac{u''(x)}{u'(x)}+....}$$

Supposons enfin que l'agent possède la loterie. Son prix de vente $p_v(x+z,h)$ est donc déterminé par :

(35) $$R\,DEU(x+\tilde{z}) = u(x+\ p_v(x+z,h))$$

où

(36) $$\mathrm{R\,DEU}(x+\tilde{z}) = u(x+z-h)+\phi\left(\frac{1}{2}\right)\left[u(x+z+h)-u(x+z-h)\right]$$

$$u(x+z-h) = u(x+z)-h\,u'(x+z)+\frac{h^2}{2}u''(x+z)+\ldots.$$

$$u(x+z+h) = u(x+z)+h\,u'(x+z)+\frac{h^2}{2}u''(x+z)+\ldots.$$

$$\mathrm{R\,DEU}(x+\tilde{\varepsilon}) = u(x+z)+h\left[-u'(x+z)+2u'(x+z)\phi(1/2)\right]+\frac{h^2}{2}\left[u''(x+z)\right]+\ldots.$$

$$u(x+p_v(h,x+z)) = u(x+p_v(0,x+z))+h\,u'(x+p_v(0,x+z))\,p'_v(0,x+z)+$$
$$\frac{h^2}{2}\left[u''(x+p_v(0,x+z))\,p'_v(0,x+z)^2+p''_v(0,x+z)\,u'(x+p_v(0,x+z))\right]$$

Par identification :

$$u(x+z) = u(x+p_v(0,x+z))$$

(37) $$\boxed{p_v(0,x+z) = z}$$

$$u'(x+z)(2\,\phi(1/2)-1) = u'(x+p_v(0,x+z))\,p'_v(0,x+z)$$

(38) $$\boxed{p'_v(0,x+z) = 2\,\phi(1/2)-1}$$

$$u''(x+z) = \left[u''(x+p_v(0,x+z))\,p'_v(0,x+z)^2+\ p''_v(0,x+z)\,u'(x+P_v(0,x+z))\right.$$

(39) $$\boxed{p''_v(0,x+z) = \frac{u''(x+z)}{u'(x+z)}\left(1-(2\,\phi(1/2)-1)^2\right)}$$

$$p_v(h,x+z) = z+h(2\,\phi(1/2)-1)+\frac{h^2}{2}\frac{u''(x+z)}{u'(x+z)}4\,\phi(1/2)(1-\phi(1/2))+\ldots$$

(40) $$\boxed{p_v(x+z,h) = E_\phi(\tilde{z})+\frac{\sigma_\phi^2(\tilde{z})}{2}\frac{u''(x+z)}{u'(x+z)}+\ldots.}$$

Dans ce cas des petits risques, on peut examiner deux types de disparités de prix : la fourchette de liquidité égale à la différence entre le prix de vente à découvert et le prix d'achat et la disparité entre les dispositions à payer et à recevoir.

Dans le cas de la fourchette de liquidité, on a :

$$p_v(x,h) - p_a(x,h) = \left[E_\phi(\tilde{z}) - \frac{\sigma_\phi^2(\tilde{z})}{2}\frac{u''(x)}{u'(x)}\right] - \left[E_\phi(\tilde{z}) + \frac{\sigma_\phi^2(\tilde{z})}{2}\frac{u''(x)}{u'(x)}\right]$$

(41) $$\boxed{p_v(x,h) - p_a(x,h) = -\sigma_\phi^2(\tilde{z})\frac{u''(x)}{u'(x)}}$$

Dès que l'individu possède une utilité marginale décroissante, sa fourchette de liquidité est positive. Par ailleurs, si le coefficient d'Arrow-Pratt est décroissant, la fourchette de liquidité décroît avec la richesse.

Dans le cas de la disparité entre les dispositions à payer et à recevoir.

$$p_v(x+z,h) - p_a(x,h) = \left[E_\phi(\tilde{z}) + \frac{\sigma_\phi^2(\tilde{z})}{2}\frac{u''(x+z)}{u'(x+z)}\right] - \left[E_\phi(\tilde{z}) + \frac{\sigma_\phi^2(\tilde{z})}{2}\frac{u''(x)}{u'(x)}\right]$$

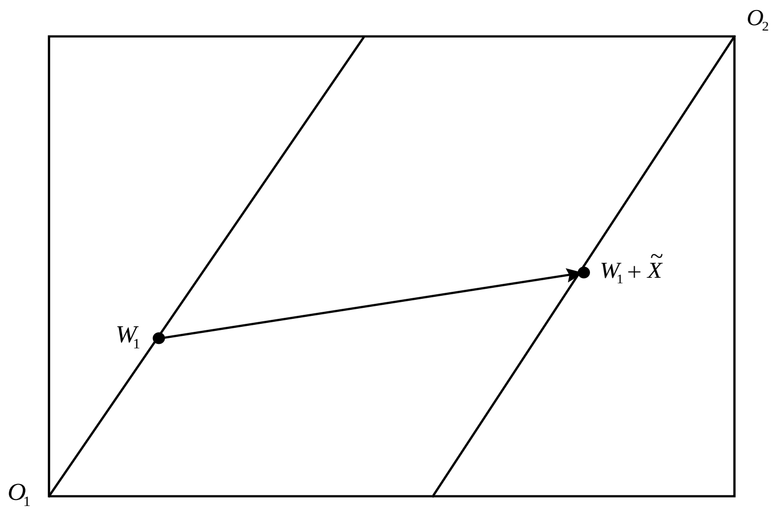
(42) $$\boxed{p_v(x+z,h) - p_a(x,h) = \frac{\sigma_\phi^2(\tilde{z})}{2}\left[\frac{u''(x+z)}{u'(x+z)} - \frac{u''(x)}{u'(x)}\right]}$$

Si le coefficient d'Arrow-Pratt est décroissant, la disponibilité à recevoir est supérieure à la disponibilité à payer. Ce résultat généralise le résultat de LaVallée (1968) et Eeckhoudt & Gollier (1992) dans le modèle d'espérance d'utilité.

6) Le partage des risques

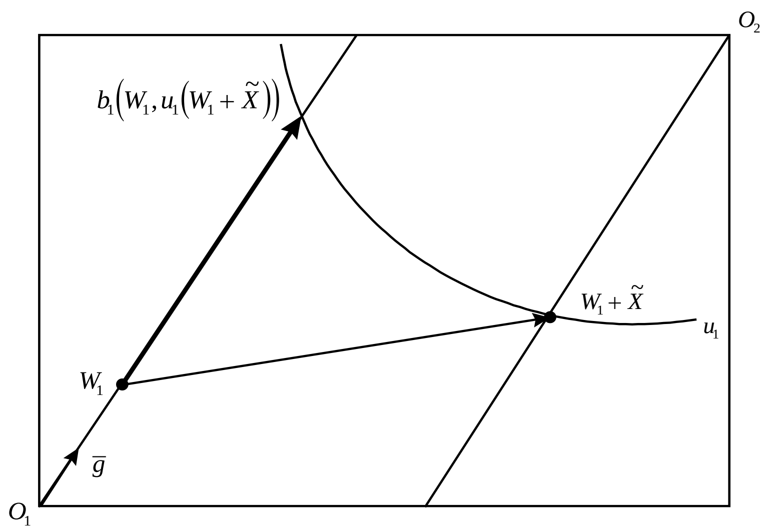
Considérons deux individus 1 et 2. L'individu 1 est doté d'une loterie $\tilde{X}$. Etudions les conditions dans lesquelles les deux individus vont échanger les loteries; c'est à dire, à quelles conditions l'agent 2 va-t-il acheter la loterie à l'agent 1.

Représentons la situation des agents dans une boîte de Pareto-Edgeworth en supposant que leurs richesses initiales (hors la loterie $\tilde{X}$) sont certaines :

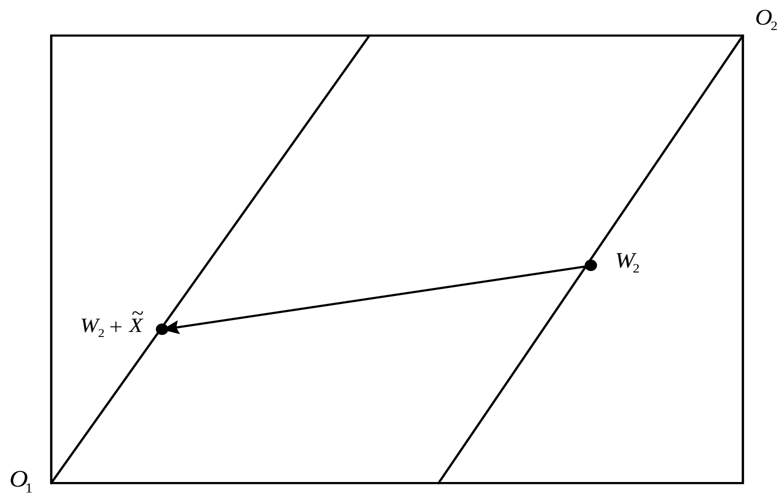


Du point de vue de l'individu 1, la situation initiale des deux agents est représentée dans la boîte de Pareto-Edgeworth par le point $W_1 + \tilde{X}$. En effet, puisque la richesse initiale de l'agent 2 est certaine on doit nécessairement se situer sur la droite de certitude de cet agent. Le changement de propriétaire de la loterie $\tilde{X}$, lorsque celui-ci s'effectue sur une base autoritaire, est représenté graphiquement par le passage du point $W_1 + \tilde{X}$ au point W_1.

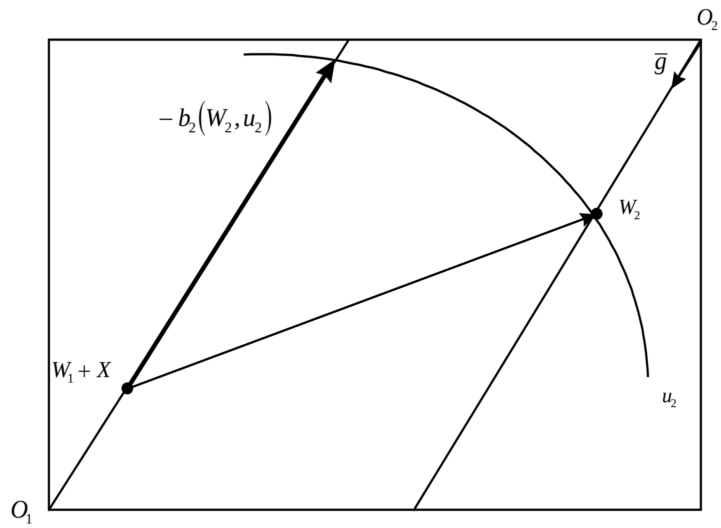
Lorsque cet échange s'effectue sur une base volontaire, on passe de $W_1 + \tilde{X}$ à un point situé sur la droite de certitude de l'agent 1, mais en général distinct de W_1. La différence entre ce point et W_1 représente la somme d'argent transféré de l'agent 2 à l'agent 1 en échange de la loterie.



Du point de vue de l'individu 2, la situation initiale des deux agents est représentée par le point W_2.



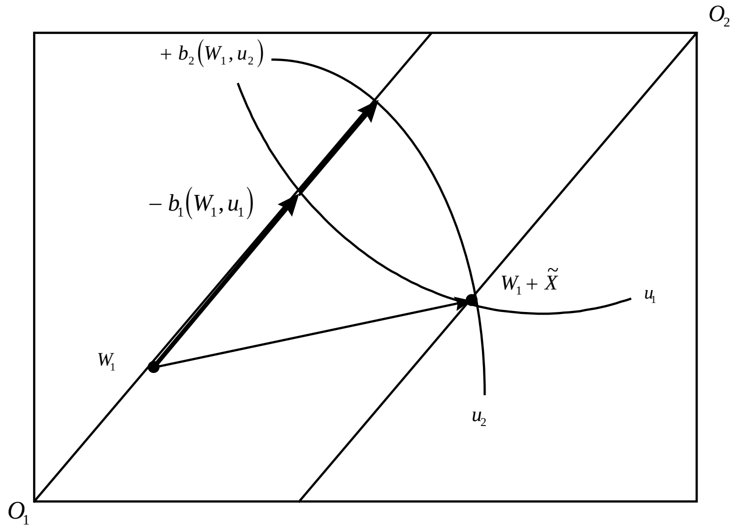
Lorsque cet échange s'effectue sur une base volontaire, on passe de W_2 à un point situé sur la droite de certitude de l'agent 1, mais en général distinct de $W_2 + \tilde{X}$. La différence entre ce point et $W_2 + \tilde{X}$ représente la somme d'argent que l'agent 2 est disposé à verser à l'agent 1 en échange de la loterie.



Tout ce passe donc, en termes de la théorie des surplus, comme si on proposait aux agents le point W_1 compte tenu de leur niveau initial d'utilité $u_1(W_1 + \tilde{X})$ et $u_2(W_2)$, respectivement. L'agent 1 n'acceptera d'échanger le panier de biens $W_1 + \tilde{X}$ contre le panier de biens W_1 que si on lui donne (au moins) $-b_1(W_1, u_1(W_1 + \tilde{X}))$ unités de biens supplémentaires dans chaque état de la nature, alors que l'agent 2 sera prêt à donner (au plus) $b_2(W_1, u_2(W_2))$.

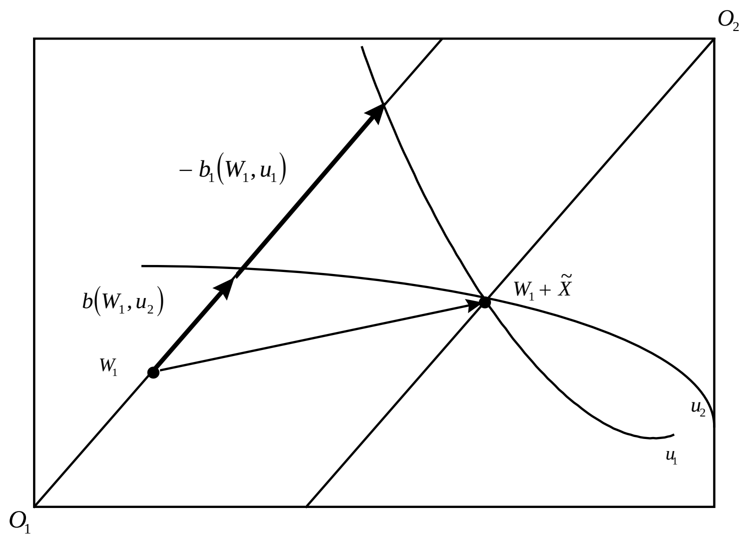
Les deux agents n'échangeront la loterie que si le prix de vente (ou disposition à recevoir) de l'agent 1 est inférieure au prix d'achat (ou disposition à payer) de l'agent 2.

Dans le cas suivant, il y aura échange possible de la loterie :



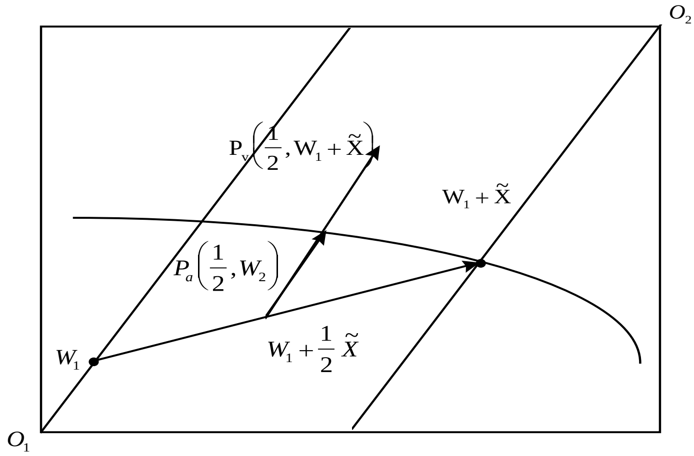
Le surplus total, étant égal à la somme des bénéfices, est représenté par le segment situé dans la lentille, dont la direction est « portée » par le vecteur $\overline{g}$. La façon dont le surplus va se répartir entre les deux agents va dépendre des termes de l'échange.

Dans le cas suivant, il n'y aura pas d'échange possible de la loterie :

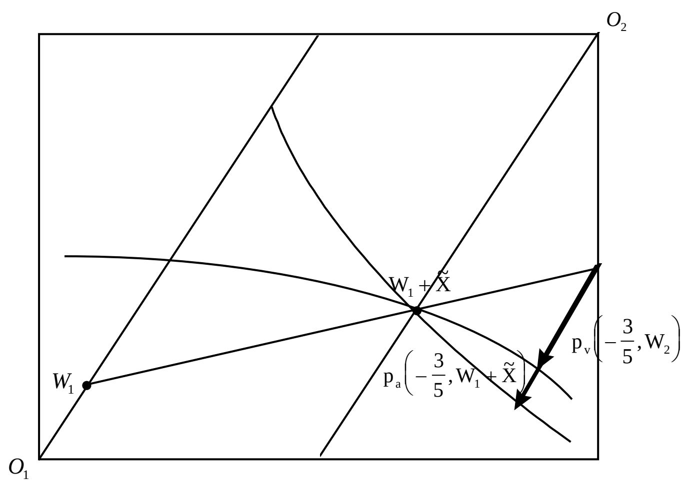


En effet, la disposition à recevoir de l'agent 1 est supérieure à la disposition à payer de l'agent 2 : $p_a(\tilde{X}, W_2) < p_v(\tilde{X}, W_1 + \tilde{X})$.

Jusqu'ici, nous avons envisagé le seul cas où l'échange porte sur la loterie dans son intégralité et non le cas où une fraction de la loterie peut être échangée. Néanmoins, même si un tel fractionnement était possible, il n'y aurait malgré tout aucun échange dans le cas envisagé ci-dessus. En effet, la disposition à payer sera toujours inférieure à la disposition à recevoir[5]. Supposons par exemple que l'agent 1 propose la moitié de sa loterie à l'agent 2. Ceci se représente dans la boîte de Pareto-Edgeworth de la manière suivante :



En revanche, si on permet à l'agent 2 de vendre à découvert la loterie, il y aura échange car son prix de vente à découvert sera inférieur au prix d'achat de l'agent 1. Une restriction à cet échange apparaîtrait si l'on « butait » sur les limites de la boîte de Pareto-Edgeworth, sauf à pouvoir fractionner la loterie. Dans le graphique suivant nous supposons que l'agent 2 vend à découvert trois-cinquième de la loterie $\tilde{X}$:

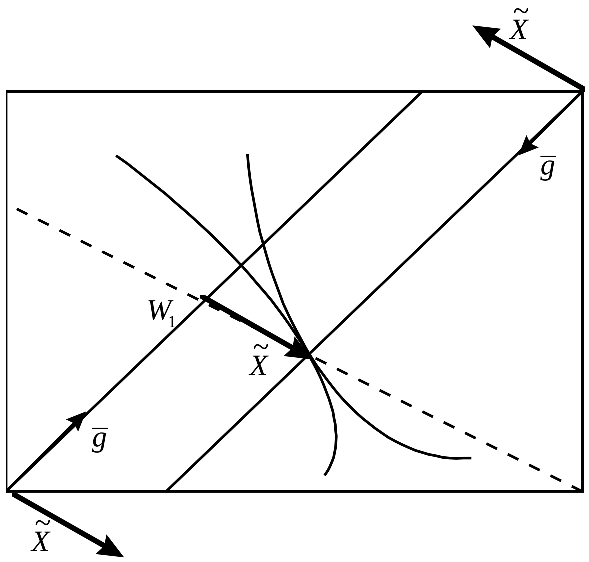


Ainsi lorsque la vente à découvert et le fractionnement sont possibles, les échanges possibles seront décrits par la droite passant par W_1 et $W_1+\tilde{X}$. Lorsque l'on se situe au-

[5] Ce résultat est indépendant de toute hypothèse de convexité concernant les préférences des agents.

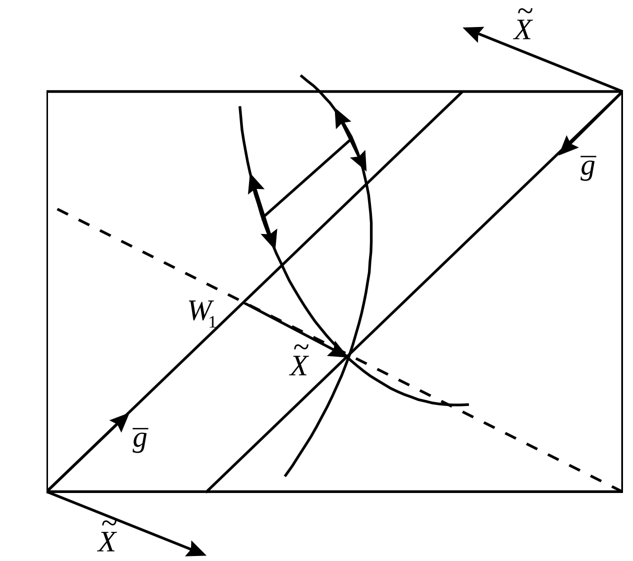
delà de $W_1+\tilde{X}$, l'agent 2 vend la loterie à découvert. Lorsque l'on se situe entre W_1 et $W_1+\tilde{X}$, l'agent 2 achète une fraction de la loterie à l'agent 1. Enfin, lorsque l'on se situe en deçà de W_1, l'agent 1 vend à découvert la loterie $\tilde{X}$ (c-à-d qu'il vend à l'agent 2 une quantité de $\tilde{X}$ supérieure à la quantité qu'il possède).

Enfin il nous reste à envisager le cas où il n'y a plus d'échange avantageux possible. Dans le cas où la situation initiale correspond à un optimum de Pareto, il n'y aura en effet plus aucun échange entre les agents. Il apparaît sur le graphique suivant qu'il est impossible de trouver un échange (que ce soit une vente à découvert de la loterie par l'agent 2 ou une vente partielle de la loterie de l'agent 1) qui soit tel que la disposition à payer de l'acheteur soit supérieure à la disposition à recevoir du vendeur :



La notion de surplus a permis ainsi à M. Allais (1981) et à D. Luenberger (1995) de donner une nouvelle caractérisation des optima de Pareto. Ces auteurs montrent que sous des conditions assez générales, une allocation est optimale au sens de Pareto si et seulement si le surplus distribuable est négatif ou nul.

Dans ce contexte où la vente à découvert et le fractionnement sont possibles, on peut s'interroger sur le caractère efficace de la maximisation du surplus distribuable total. On peut montrer, à l'aide du graphique suivant, que cette maximisation ne conduit pas nécessairement à un optimum de Pareto.

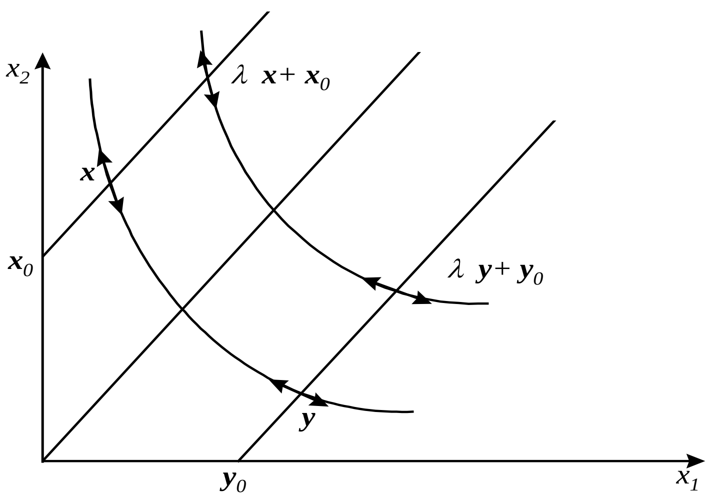


Le surplus, représenté par le segment situé dans la lentille, est maximum dans le cas où les préférences sont convexes lorsque les tangentes aux courbes d'indifférence sont parallèles [cf. Allais (1981), p. 461].

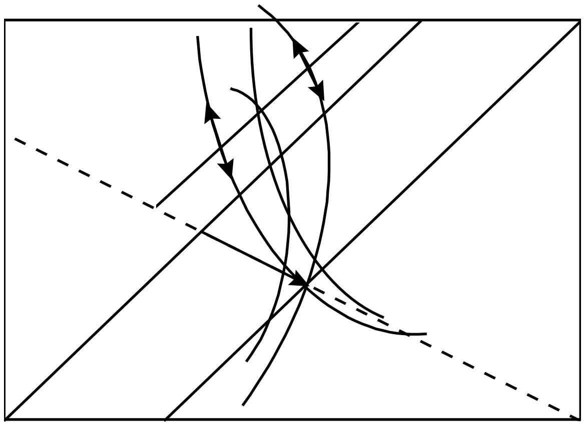
Si les fonctions d'utilité des deux agents sont quasi-homotétiques, alors quelle que soit la façon dont le surplus est réparti entre les agents, l'allocation obtenue par maximisation du surplus distribuable est Pareto optimale. En effet les préférences d'un agent sont quasi-homothétiques si et seulement si on a :

$\forall \lambda > 0, \mathbf{x} \sim \mathbf{y} \Leftrightarrow \lambda \mathbf{x} + \mathbf{x}_0 \sim \lambda \mathbf{y} + \mathbf{y}_0$

Il s'ensuit que les droites d'Engel sont des droites parallèles à la première bissectrice et que le long de tout rayon parallèle à la droite à 45° les taux marginaux de substitution sont identiques[6].



Cependant, dans le cas général, à la suite de la maximisation du surplus, les taux marginaux correspondant au partage choisi ne sont pas nécessairement égaux. Les agents sont alors incités à procéder à un nouvel échange :



La séquence d'échanges stoppera lorsqu'on aura atteint un optimum de Pareto, où par définition il n'existe plus de surplus distribuable.

On peut généraliser l'approche précédente au cas d'un nombre quelconque d'agents[7]. Soit un acheteur i (i = 2,...,I) quelconque achetant une part α_i de la loterie $\tilde{X}$ détenue par l'individu 1. Par définition le prix d'achat est donné par l'équation :

$$(43) \qquad b_i\left(W_i + \alpha_i \tilde{X}, u_i\left(W_i\right)\right) = p_a^i\left(\alpha_i, W_i\right) \qquad i = 2,...,I$$

où W_i est la richesse initiale, éventuellement aléatoire, de l'agent i. Pour le vendeur 1 le prix de vente de la loterie est donné par :

$$(44) \qquad b_1\left(W_1 + \left(1 - \sum_{i=2}^{I} \alpha_i\right)\tilde{X}, u_1\left(W_1 + \tilde{X}\right)\right) = -\, p_v^1\left(1 - \sum_{i=2}^{I} \alpha_i, \left(W_1 + \tilde{X}\right)\right)$$

Afin d'homogénéiser les notations, nous allons noter la richesse initiale du vendeur y compris la loterie $\tilde{W}_1 = W_1 + \tilde{X}$. On aura donc :

$$b_1\left(\tilde{W}_1 + \alpha_1 \tilde{X}, u_1\left(\tilde{W}_1\right)\right)$$

Il s'ensuit que la détention résiduelle de la loterie par l'agent 1 est donnée par

[6] Cf. Deaton & Muelbauer (1980) p. 144-145.

[7] Le cas de l'échange d'une loterie entre deux agents seulement a été analysé, dans le cadre du modèle d'espérance d'utilité par Eeckhoudt & Roger (1994).

(45) $\alpha_1 = -\sum_{i=2}^{I} \alpha_i$.

Il y aura échange si et seulement si il existe $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_I)$ avec $\sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0$ tel que :

$\sum_{i=1}^{I} b_i\left(\tilde{W}_i + \alpha_i \tilde{X}, u_i\left(\tilde{W}_i\right)\right) \geq 0$ où $\tilde{W}_i$ désigne maintenant la richesse initiale de tout agent *i* (y compris l'agent 1).

Cette condition signifie que la somme des dispositions à payer nette[8] de tous les agents est supérieure à la disposition à recevoir du vendeur

puisque dans ce cas on aura $\sum_{i \in A} p_a^i\left(\alpha_i, W_i\right) \geq p_v\left(-\sum_{i \in A} \alpha_i, W_j\right)$.

Cherchons donc la répartition des risques $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_I)$ qui maximise le surplus total :

$$(46) \qquad \begin{cases} \underset{\{\alpha_i\}}{\text{Max}} \sum_i b_i\left(\tilde{W}_i + \alpha_i \tilde{X}, u_i\left(W_i\right)\right) \\ \text{s.c.} \sum_i \alpha_i = 0 \qquad (\lambda) \end{cases}$$

Les conditions du premier ordre de ce programme s'écrivent :

$$(47) \qquad \boxed{\sum_s \frac{\partial b_i\left(\tilde{W}_i + \alpha_i^* \tilde{X}, u_i\left(\tilde{W}_i\right)\right)}{\partial x_{is}} X_s = \lambda \qquad \forall\ i = 1, ..., I}$$

Le surplus total est maximum lorsque la part du risque détenue par chaque agent est telle que la somme des bénéfices marginaux pondérée par le paiement de la loterie est identique pour chaque agent. Or on sait qu'on peut interpréter le bénéfice marginal comme un prix d'état d'après la propriété (iv) de la fonction de bénéfice. La formule signifie donc que la répartition des risques qui maximise le surplus total est telle que la loterie est répartie entre tous les agents de façon à ce qu'ils l'évaluent identiquement.

[8] Il peut y avoir des agents disposés à vendre à découvert parmi les agents 2 à I.

On sait, qu'un optimum de Pareto est tel que le bénéfice total est maximum et nul[9]. Une répartition de la loterie est optimale au sens de Pareto si elle est solution du programme suivant :

$$(48) \quad \begin{cases} \underset{\{\alpha_i\}_{i=1}^{I}}{\text{Max}} \sum_{i=1}^{I} b_i\left(x_i, u_i\left(\tilde{W}_i + \alpha_i^* \tilde{X}\right)\right) \\ \text{s.c.} \sum_i x_i = \sum_i \tilde{W}_i \end{cases}$$

Les conditions du premier ordre s'écrivent :

$$(49) \quad \frac{\partial b_i\left(\tilde{W}_i + \alpha_i^* \tilde{X}, u_i\left(\tilde{W}_i + \alpha_i^* \tilde{X}\right)\right)}{\partial x_{is}} = \mu_s \qquad \forall\ i = 1, \ldots, I$$

On constate ainsi que l'allocation des risques qui maximise le surplus total n'est pas en général un optimum de Pareto.

7) La fourchette de liquidité

Par définition de la fourchette de liquidité d'un teneur de marché:

$$(50) \quad \begin{aligned} F(W_0) &= p_v\left(\tilde{X}, W_0\right) - p_a\left(\tilde{X}, W_0\right) \\ &= -\, b\left(W_0 - \tilde{X}, u_0(W_0)\right) - b\left(W_0 + \tilde{X}, u_0(W_0)\right) \end{aligned}$$

Nous allons étudier comment la fourchette varie lorsque la richesse initiale du consommateur augmente avec certitude.

$$(51) \quad F(W_0 + \alpha\bar{g}) = -\, b\left(W_0 + \alpha\bar{g} - \tilde{X}, u(W_0 + \alpha\bar{g})\right) - b\left(W_0 + \alpha\bar{g} + \tilde{X}, u(W_0 + \alpha\bar{g})\right)$$

En utilisant la propriété (ii) de la fonction de bénéfice on peut écrire

$$(52) \quad F(W_0 + \alpha\bar{g}) = -\left(b\left(W_0 - \tilde{X}, u(W_0 + \alpha\bar{g})\right) + \alpha\right) - \left(b\left(W_0 + \tilde{X}, u(W_0 + \alpha\bar{g})\right) + \alpha\right)$$

Si $\alpha \geq 0$ alors $u(W_0 + \alpha\bar{g}) \geq u(W_0)$. En utilisant la propriété (i) de la fonction de bénéfice, on peut écrire :

$$(53) \quad F(W_0 + \alpha\bar{g}) \geq -\, 2\alpha - \underbrace{b\left(W_0 - \tilde{X}, u(W_0)\right) - b\left(W_0 + \tilde{X}, u(W_0)\right)}_{F(W_0)}$$

Ce qui par définition de la fonction de la fourchette donne

$$(54) \quad \boxed{F(W_0 + \alpha\bar{g}) - F(W_0) \geq -\, 2\alpha}$$

[9] Cf. Luenberger (1995) p. 189-192.

Si $\alpha \leq 0$ alors $u\left(W_0 + \alpha\overline{g}\right) \leq u\left(W_0\right)$ et on a

(55) $\boxed{F\left(W_0 + \alpha\overline{g}\right) - F\left(W_0\right) \leq -2\alpha}$

On a donc pour tout $\alpha \neq 0$

(56) $\boxed{\dfrac{F\left(W_0 + \alpha\overline{g}\right) - F\left(W_0\right)}{\alpha} \geq -2}$

On retrouve avec l'équation (56) une formule analogue à celles développées par Kolm[10] (1966) pour les prime d'assurance et de risque dans le cas d'un accroissement additif certain de la richesse initiale (et non dans le cas d'un accroissement multiplicatif certain de la richesse initiale comme ici).

8) Conclusion : Critique de Kahneman & Tversky (1979)

Les identités $V\left[W_0 - p_a\left(\tilde{X}, W_0\right) + \tilde{X}\right] = V\left(W_0\right)$ et $V\left(W_0 + \tilde{X}\right) = V\left[W_0 + p_v\left(\tilde{X}, W_0\right)\right]$ ne peuvent être définies que si la fonction de valeur est définie sur les résultats exprimés en termes de richesse finale. Ce type de formalisations est une illustration de la remarque suivante formulée par Kahneman & Tversky (1979) : l'application usuelle du modèle d'espérance d'utilité au problème du choix entre des variables aléatoires est basée sur trois principes dont celui de "l'intégration des actifs certains" qui conduit à ce que les états finaux (déterminés relativement à la position certaine initiale), plutôt que les gains et les pertes eux-mêmes, constituent le domaine sur lequel est définie la fonction d'utilité. Sur la base de différents résultats expérimentaux, Kahneman & Tversky contestent la pertinence de ce principe et concluent que la notion de préférences stables doit être abandonnée au profit de préordres de préférences définis par rapport à un niveau de référence, autrement dit pour une dotation initiale particulière. En d'autres termes, retenir les identités (1) et (2) suppose implicitement l'acceptation préalable de l'hypothèse suivante : *définir les prix de vente et prix d'achat d'une variable aléatoire* $\tilde{X}$ *à l'aide d'une même fonction représentative des préférences V suppose que l'on considère équivalent de postuler les axiomes de comportement pour une dotation initiale w ou pour une dotation initiale* $w + p_V$. Ceci implique, en particulier, que l'on considère équivalent de postuler les axiomes de comportements pour des distributions

[10] Cf. Kolm (1966) p. 86-87 équations (6) et (14).

de probabilité sur les gains et les pertes ou pour des distributions de probabilité sur les richesses finales. Ceci ne signifie pas que l'ordre des préférences sera supposé identique entre d'une part les loteries $(x_1,p_1 ; ... ; x_n,p_n)$ et $(y_1,q_1 ; ... ; y_m,q_m)$ et d'autre part les loteries $(w+ x_1,p_1 ; ... ; w+x_n,p_n)$ et $(w+y_1,q_1 ; ... ; w+y_m,q_m)$, mais celà revient à supposer -s'il s'agit par exemple des axiomes du modèle d'espérance d'utilité- que la fonction u obtenue dans l'expression $\sum_{i=1}^{n} p_i \; u(x_i)$ est identique à la fonction u obtenue dans l'expression $\sum_{i=1}^{n} p_i \; u(w+x_i)$. Une autre manière de formuler l'hypothèse sous-jacente aux identités (1) et (2) est d'affirmer que les axiomes postulés pour le comportement d'un individu doté d'une richesse à 100 % certaine sont également valables pour un individu doté d'une richesse constituée d'une part certaine et d'une part aléatoire.

Dans la généralisation du modèle d'espérance d'utilité qu'ils proposent, Kahneman & Tversky ne retiennent pas cette hypothèse. Il se pose alors un problème de comparabilité des disponibilités. En effet, en définissant la fonction représentative des préférences pour une dotation initiale particulière (le "statu quo"), le prix d'achat d'une variable aléatoire $\tilde{X}$ relative à une dotation initiale w n'est plus comparable avec le prix de vente de cette même variable aléatoire, implicitement relatif à *une dotation w accrue du droit de participation à* $\tilde{X}$. En d'autres termes, un tel modèle ne possède pas un degré de généralité suffisant pour permettre une étude satisfaisante de la disparité prix d'achat-prix de vente. En conséquence, le problème du lien entre équivalent certain et disponibilité ne se pose pas dans le cadre de leur théorie. En effet, l'équivalent certain d'une variable aléatoire $\tilde{X}$ sera implicitement une disponibilité à recevoir dans le cas d'une variable aléatoire "favorable" et une disponibilité à payer dans le cas d'une variable aléatoire "défavorable".

Si Kahneman & Tversky indiquent qu'au sein de la fonction représentative des préférences l'évaluation de la satisfaction des résultats devrait être, au sens strict, une fonction de deux arguments (la dotation initiale et l'amplitude des gains ou des pertes), ils concèdent que le préordre de préférences n'est pas grandement altéré par des variations modestes de la dotation initiale. En conséquence, concluent-ils, la représentation par une fonction d'un seul argument fournit généralement une approximation satisfaisante. Il n'est donc pas illégitime de retenir les identités (1) et (2) lorsque les résultats x_i sont "petits" relativement à w.

ANNEXE

Supposons que l'on puisse acheter une fraction γ d'une loterie actuellement neutre $\tilde{\varepsilon}$. Par définition le prix d'achat de cette fraction est donné par :

$$p_a(\gamma, x+z) / R\,DEU\left(x+z+\gamma\,\tilde{\varepsilon} - p_a(\gamma, x+z)\right) = u(x)$$

où

$$R\,DEU\left(x+z+\gamma\,\tilde{\varepsilon} - p_a(\gamma, x+z)\right) = \phi(1)\,u\left(x+z+\gamma\,\varepsilon_1 - p_a(\gamma,x)\right) + \sum_{i=2}^{n} \phi\left(\sum_{j=i}^{n} p_j\right)$$
$$\left[\,u\left(x+z+\gamma\,\varepsilon_i - p_a(\gamma,x)\right) - u\left(x+z+\gamma\,\varepsilon_{i-1} - p_a(\gamma,x)\right)\right]$$

Définissons $\quad u\left(x+z+\gamma\,\varepsilon_i - p_a(\gamma,x)\right) = f_i(\gamma)$

$$f_i'(\gamma) = u'\left(x+z+\gamma\,\varepsilon_i - p_a(\gamma,x)\right)\left(\varepsilon_i - p_a(\gamma,x)\right)$$

$$f_i''(\gamma) = u''\left(x+z+\gamma\,\varepsilon_i - p_a(\gamma,x)\right)\left(\varepsilon_i - p_a'(\gamma,x)\right)^2 - p_a''(\gamma,x)\,u'\left(x+z+\gamma\,\varepsilon_i - p_a(\gamma,x)\right)$$

$$u\left(x+z+\gamma\,\varepsilon_i - p_a(\gamma,x)\right) = u\left(x+z-p_a(0,x)\right) + \gamma\left(\varepsilon_i - p_a'(0,x)\right)u'\left(x+z-p_a(0,x)\right)$$
$$+\frac{\gamma^2}{2}\left[u''\left(x+z-p_a(0,x)\right)\left(\varepsilon_i - p_a'(0,x)\right)^2 - p_a''(0,x)\right.$$
$$\left. u'\left(x+z+\gamma\,\varepsilon_i - p_a(\gamma,x)\right)\right]$$

Par identification, on doit avoir :

$$u(x) = \phi(1)\,u\left(x+z-p_a(0,x)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{p_a(0,x) = z} \qquad \text{si } \phi(1) = 1$$

$$0 = \phi(1)\,u\left(\varepsilon_1 - p_a'(0,x)\right)u'(x) + \sum_{i=2}^{n}\phi\left(\sum_{j=i}^{n} p_j\right)\left[\left(\varepsilon_i - p_a'(0,x)\right) - \left(\varepsilon_{i-1} - p_a'(0,x)\right)\right]u'(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{p_a'(0,x) = \varepsilon_1 + \sum_{i=2}^{n}\phi\left(\sum_{j=i}^{n} p_j\right)\left(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}\right) = E_\phi\,\tilde{\varepsilon}}$$

$$0 = \phi(1)\left[u''(x)\left(\varepsilon_i - E_\phi\tilde{\varepsilon}\right)^2 - p_a''(0,x)\,u'(x)\right] + \sum_{i=2}^{n}\phi\left(\sum_{j=i}^{n} p_j\right)\times$$
$$\left\{\left[u''(x)\left(\varepsilon_i - E_\phi\tilde{\varepsilon}\right)^2 - p_a''(0,x)\,u'(x)\right] - \left[u''(x)\left(\varepsilon_{i-1} - E_\phi\tilde{\varepsilon}\right)^2 - p_a''(0,x)\,u'(x)\right]\right\}$$

$$p_a''(0,x)=\frac{u''(x)}{u'(x)}\left\{\left[\left(\varepsilon_i - E_\phi\tilde{\varepsilon}\right)^2 - p_a''(0,x))\right]-\left[\left(\varepsilon_{i-1} - E_\phi\tilde{\varepsilon}\right)^2 - p_a''(0,x)\right]\right\}$$

$$\boxed{p_a(\gamma,x)=z+\gamma\, E_\phi\tilde{\varepsilon}+\frac{\gamma^2}{2}\frac{u''(x)}{u'(x)}\sigma_\phi^2(\tilde{\varepsilon})+\ldots}$$

où

$$E_\phi\tilde{\varepsilon}=\varepsilon_1+\sum_{i=2}^{n}\phi\left(\sum_{j=i}^{n}p_j\right)\left(\varepsilon_i-\varepsilon_{i-1}\right)$$

$$\sigma_\phi^2\tilde{\varepsilon}=\left(\varepsilon_1-E_\phi\tilde{\varepsilon}\right)^2+\sum_{i=2}^{n}\phi\left(\sum_{j=i}^{n}p_j\right)\left[\left(\varepsilon_1-E_\phi\tilde{\varepsilon}\right)^2-\left(\varepsilon_i-\varepsilon_{i-1}\right)^2\right]$$

Soit :

$$p_v(\gamma,x+z)/R\,DEU(x+z+\gamma\,\tilde{\varepsilon})=u(x+p_v(\gamma,x+z))$$

$$R\,DEU(x+z+\gamma\,\tilde{\varepsilon})=\phi(1)\,u(x+z+\gamma\,\varepsilon_1)+\sum_{i=2}^{n}\phi\left(\sum_{j=i}^{n}p_j\right)\left[\,u(x+z+\gamma\,\varepsilon_i)-u(x+z+\gamma\,\varepsilon_{i-1})\right]$$

$$u(x+z+\gamma\,\varepsilon_i)=f_i(\gamma)$$

$$f_i'(\gamma)=u'(x+z+\gamma\,\varepsilon_i)\,\varepsilon_i$$

$$f_i''(\gamma)=u''(x+z+\gamma\,\varepsilon_i)\,\varepsilon_i^2$$

$$u(x+z+\gamma\,\varepsilon_i)=u(x+z)+\gamma\,\varepsilon_i u'(x+z)+\frac{\gamma^2}{2}\varepsilon_1^2\,u''(x+z)+\ldots$$

$$u(x+p_v(\gamma,x+z))=u(x+p_v(0,x+z))+\gamma\,p_v{}'(0,x+z)\,u'(x+p_v(0,x+z))+$$
$$\frac{\gamma^2}{2}\left[p_v{}''(0,x+z)\,u'(x+p_v(0,x+z))+u''(x+p_v(0,x+z))\left(p_v{}'(0,x+z)\right)^2\right]$$

$$u(x+p_v(\gamma,x+z))=\phi(1)\,u(x+z)$$

$$\boxed{p_v(0,x+z)=z}\qquad \text{si }\ \phi(1)=1$$

$$p'_v(0,x+z)=\varepsilon_1+\sum_{i=2}^{n}\phi\left(\sum_{j=i}^{n}p_j\right)\left(\varepsilon_i-\varepsilon_{i-1}\right)$$

$$P''_v(0,x+z)\,u'(x+z)+u''(x+z)\left(p'_v(0,x+z)\right)^2=\phi(1)\,\varepsilon_1^2\,u''(x+z)$$
$$+\sum_{i=2}^{n}\phi\left(\sum_{j=i}^{n}p_j\right)u''(x+z)\left(\varepsilon_i-\varepsilon_{i-1}\right)$$

$$p''_v(0,x+z)=\frac{u''(x+z)}{u'(x+z)}\left\{\varepsilon_1^2+\sum_{i=2}^{n}\phi\left(\sum_{j=i}^{n}p_j\right)\left(\varepsilon_i^2-\varepsilon_{i-1}^2\right)-\left(E_\phi\tilde{\varepsilon}\right)^2\right\}$$

$$\boxed{p_v(\gamma,x+z)=z+\gamma\,E_\phi\tilde{\varepsilon}+\frac{\gamma^2}{2}\frac{u''(x+z)}{u'(x+z)}\sigma_\phi^2(\tilde{\varepsilon})+\ldots}$$

$$E_\phi\tilde{\varepsilon}=\varepsilon_1+\sum_{i=2}^{n}\phi\left(\sum_{j=i}^{n}p_j\right)\left(\varepsilon_i-\varepsilon_{i-1}\right)$$

$$\sigma_\phi^2(\tilde{\varepsilon})=\varepsilon_1^2+\sum_{i=2}^{n}\phi\left(\sum_{j=i}^{n}p_j\right)\left(\varepsilon_i^2-\varepsilon_{i-1}^2\right)-\left(E_\phi\tilde{\varepsilon}\right)^2$$

On a donc :

$$p_v(\gamma,x+z)-p_a(\gamma,x+z)=\frac{\gamma^2}{2}\underbrace{\left[\frac{u''(x+z)}{u'(x+z)}-\frac{u''(x)}{u'(x)}\right]}_{+\,\text{si DARA}}\sigma_\phi^2(\tilde{\varepsilon})>0$$

Bibliographie :

Abouda, M. & Chateauneuf, A. (1997), "Selling and buying prices, the no-trade interval and symmetrical risk aversion à la Quiggin", Document de travail, CERMSEM, Université de Paris I.

Allais, M. (1981), *La théorie générale des surplus*, Presses Universitaires de Grenoble.

Dow, J. & Werlang, S. R. d. C. (1992), "Uncertainty Aversion, RiskAversion, and the optimal Choice Portfolio", Econometrica, 60, p. 197-204.

Eeckhoudt, L. & Roger, P. (1994), "Partage des risques et création de valeur ajoutée", *Revue économique*, 45, p. 1-20.

Kahneman, D. & Tversky, A. (1979). "Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk"- *Econometrica*, 47, p. 263-291.

Kolm S. C. (1966), *Les choix financiers et monétaires*, Dunod.

La Vallee, I. H. (1968). "On Cash Equivalents and Information Evaluation in Decisions under Uncertainty, part I,Basic Theory"- *Journal of the American Statistical Association*, 63, p. 252-275.

Luenberger D. G. (1995), *Microeconomic Theory*, Mc Graw-Hill, 1995

Pratt, J. W. (1964), "Risk Aversion in the small and in the large", *Econometrica*, vol.32, p. 122-136.